Secondo la Legge di Poiseuille

$$Q = \frac{\pi \rho a^4}{8\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|$$

Q = portata (in massa) $= \left[\frac{kg}{s}\right]$

$$q = \frac{Q}{\rho} = \text{portata volumetrica} = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Se $\left|\frac{dp}{dx}\right| = \text{cost} \Rightarrow \Delta p = \int_0^L \left|\frac{dp}{dx}\right| dx = \left|\frac{dp}{dx}\right| \cdot L$

e quindi la portata volumetrica è

$$q = \frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{L} \Rightarrow \Delta p = \frac{q \cdot 8\eta L}{\pi a^4}$$

numericamente

$$\Delta p = \frac{2\times10^{-3}\ m^3/s \cdot 8\cdot10^{-3}\ Pa\cdot s \cdot 4\times10^3\ m}{3.14\times(4\times10^{-2})^4\ m^4} = 7.96\times10^3\ Pa$$

per ottenere una differenza di pressione di 7.96×10^3 Pa devo utilizzare l'altezza piezometrica, data da

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{7.96\times10^3}{9.8\times10^3} = 0.81\ m$$

Esercizio #2

$\ell = 35\ cm$

$\mu = 0.65\ g/m$

$\nu_n = 1584 \qquad \nu_{n+1} = 1980$

ν_1 (armonica principale) $= \nu_{n+1} - \nu_n = 396\ Hz$

$\nu_1 = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \implies T = (2\ell\nu_1)^2 \cdot \mu = 49.95\ N$

$\nu_n = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 2\ell\nu_n\sqrt{\frac{\mu}{T}} = 4$

le due armoniche sono la 4 e la 5

$\nu_3 = \frac{3}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \nu_4 - \nu_1 = 1188$ $\qquad 1300 \le \nu \le 2300$

$\nu_6 = \frac{6}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \nu_5 + \nu_1 = 2376$

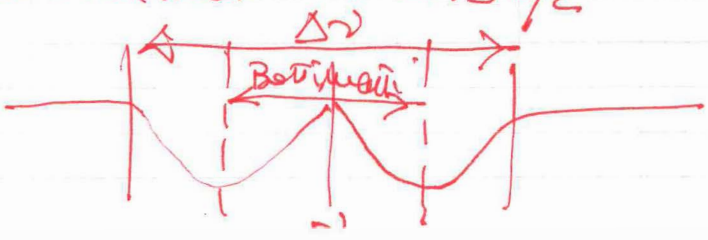
$v = \lambda\nu = 2\ell \cdot 396\ Hz = 277\ m/s$

Approfondimenti

Banda critica $\Delta\nu = 0.3 \cdot \nu^{0.9}$

Battimenti $\nu \pm \Delta\nu/4$

Suono Aspro e Rumoroso $\nu \pm \Delta\nu/2$



Esercizio #3

Soluzione

NB: esercizio uguale all'Es.3 del 10 luglio 2015 e dell'11 settembre 2018, con incognite diverse

Per risolvere questo esercizio dobbiamo ricordare che alla stessa quota la pressione atmosferica è la stessa, come dimostrato dalla legge di Stevino, ma qui dobbiamo modificare la relazione che lega la pressione alla quota, che non può essere lineare, altrimenti come già visto, finiremmo per trovare pressioni minori di zero a circa 10 km di altezza. Detta x l'altezza della ciminiera, possiamo scrivere le equazioni di Bernoulli dentro e fuori dalla ciminiera, ipotizzando che all'esterno della stessa l'aria (considerata un gas perfetto) sia ferma:

$$\begin{cases} p_0 = p_x + \rho_e g x \\ p_0 = p_x + \rho_i g x + \dfrac{1}{2}\rho_i v_x^2 \end{cases}$$

da cui

$$\rho_e g x = \rho_i g x + \frac{1}{2}\rho_i v_x^2$$

ρ_e e ρ_i sono la densità dell'aria all'esterno ed all'interno della ciminiera, rispettivamente. La soluzione semplice consiste nel considerare le densità dell'aria dipendenti solo dalla temperatura esterna ed interna e non dalla pressione, per cui sono legate tra loro dalla relazione

$$\rho_e T_e = \rho_i T_i$$

e sostituendo nell'equazione sopra scritta, risulta

$$\rho_i \frac{T_i}{T_e} g x = \rho_i g x + \frac{1}{2}\rho_i v_x^2$$

da cui

$$x = \frac{v_x^2}{2g\left(\frac{T_i}{T_e} - 1\right)} = 79.5 \text{ m}$$

avendo posto $\rho_e = 1.27 \text{ kg/m}^3$, e $g = 9.31 \text{ m/s}$. La pressione al suolo non serve in quanto viene semplificata nei calcoli. Questo calcolo però non tiene conto del fatto che la densità varia anche con la quota oltre che con la temperatura, per cui dobbiamo sostituire

$$p_x = p_0 - \rho g x \quad \text{con} \quad p_x = p_0 \exp\left(-\frac{\rho g x}{p_0}\right)$$

e per evitare di lavorare con un'espressione trascendente, possiamo sviluppare in Serie di Taylor

$$p_x = p_0 - \rho g x + \frac{1}{2}\frac{(\rho g x)^2}{p_0} - \dots$$

e fermarci al secondo ordine e risolvere questa nuova equazione

$$\begin{cases} p_0 = p_x + \rho_e g x - \dfrac{1}{2}\dfrac{(\rho_e g x)^2}{p_0} \\ p_0 = p_x + \rho_i g x - \dfrac{1}{2}\dfrac{(\rho_i g x)^2}{p_0} + \dfrac{1}{2}\rho_i v_x^2 \end{cases}$$

da cui

$$\rho_e g x - \frac{1}{2}\frac{(\rho_e g x)^2}{p_0} = \rho_i g x - \frac{1}{2}\frac{(\rho_i g x)^2}{p_0} + \frac{1}{2}\rho_i v_x^2$$

sostituendo ρ_i, semplificando e riarrangiando i termini

$$\frac{1}{2}\frac{\rho_e g^2}{p_0}\left[1 - \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2\right] x^2 - g\left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) x + \frac{1}{2}\frac{T_e}{T_i} v_x^2 = 0$$

che, analogamente a quanto fatto nell'Es.1 possiamo scrivere come

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho_e g^2}{p_0}\left[1 - \left(\dfrac{T_i}{T_e}\right)^2\right] \\ b = -g\left(1 - \dfrac{T_i}{T_e}\right) \\ c = \dfrac{1}{2}\dfrac{T_e}{T_i} v_x^2 \end{cases}$$

con le due soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_1 = 9660 \text{ m, e } x_2 = 80.2 \text{ m}$$

La prima è una soluzione "alternativa" ma comunque possibile, mentre la seconda e' la soluzione corretta rispetto a quella trovata con l'approssimazione di Stevino. L'errore commesso è

$$(80.2 - 79.5)/80.2 = 0.82\%$$